

«Sulle spalle dei giganti», AISF Bologna, 10 maggio 2018

La scoperta delle Transizioni Topologiche di Fase

Il premio Nobel per la Fisica 2016
conferito a Kosterlitz, Thouless e Haldane

(Il parte)

Cristian Degli Esposti Boschi, email : degliesposti@bo.imm.cnr.it

This year's Laureates showed that Landau's classification of the phases of matter was incomplete - there are additional so-called "topological phases" with characteristic values for different topological invariants. With the aid of topology they also showed how one can explain observed transitions between different phases of matter that should not be possible according to earlier theory.

- Ancora sulla topologia
- Dove ricerchiamo **fasi topologiche** (nella fisica della materia) (effetto Hall Q., isolanti T., ...)
 - Perché?

Fonti: Haldane Nobel Lecture, Kane & Moore, Phys. World 2011

Ancora sulla Topologia

Proprietà intrinseche delle figure quando operiamo trasformazioni che non prevedano sovrapposizioni, tagli o cuciture...

Oggetti con proprietà topologiche ben definite -
Numero di maniglie (o buchi)...



Haldane: «Topological Quantum Matter» Le funzioni di risposta del sistema quantistico sono date da invarianti topologici (interi)

Dove cerchiamo fasi topologiche nella materia?

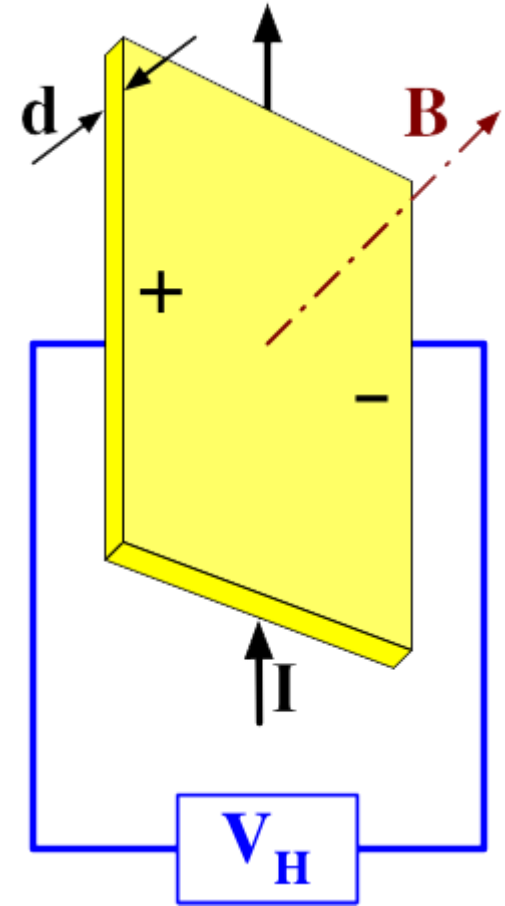
L'effetto Hall, lastra di conduttore sottoposta ad un campo magnetico B

Densità di corrente $\vec{j} \sim \sigma_H \vec{E}$

Conductività Hall

Nell'EH «classico» la conduttività risulta una funzione di $1/B$.

Esiste invece un regime quantistico dove si osserva un comportamento «esotico» a gradini...



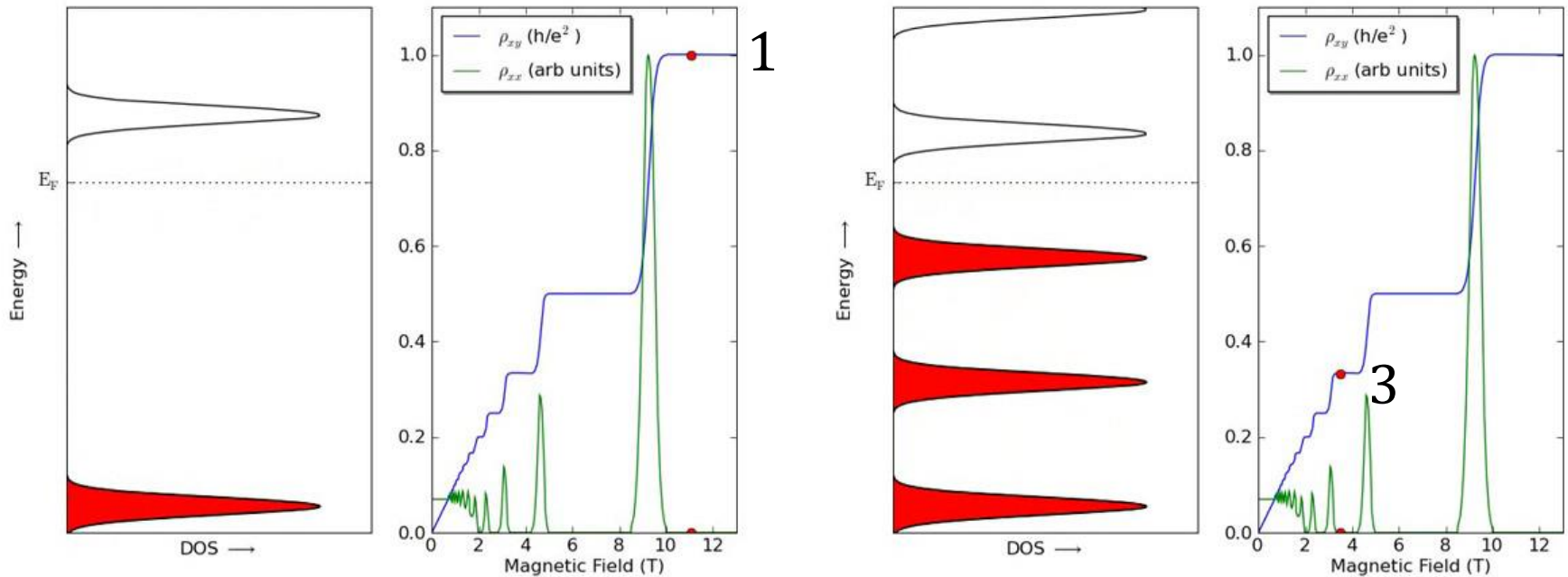
Fonte: Wikipedia

Effetto Hall Quantistico (intero)

Campioni sottili quasi 2D

$$\vec{j} \sim \sigma_H \vec{E}$$

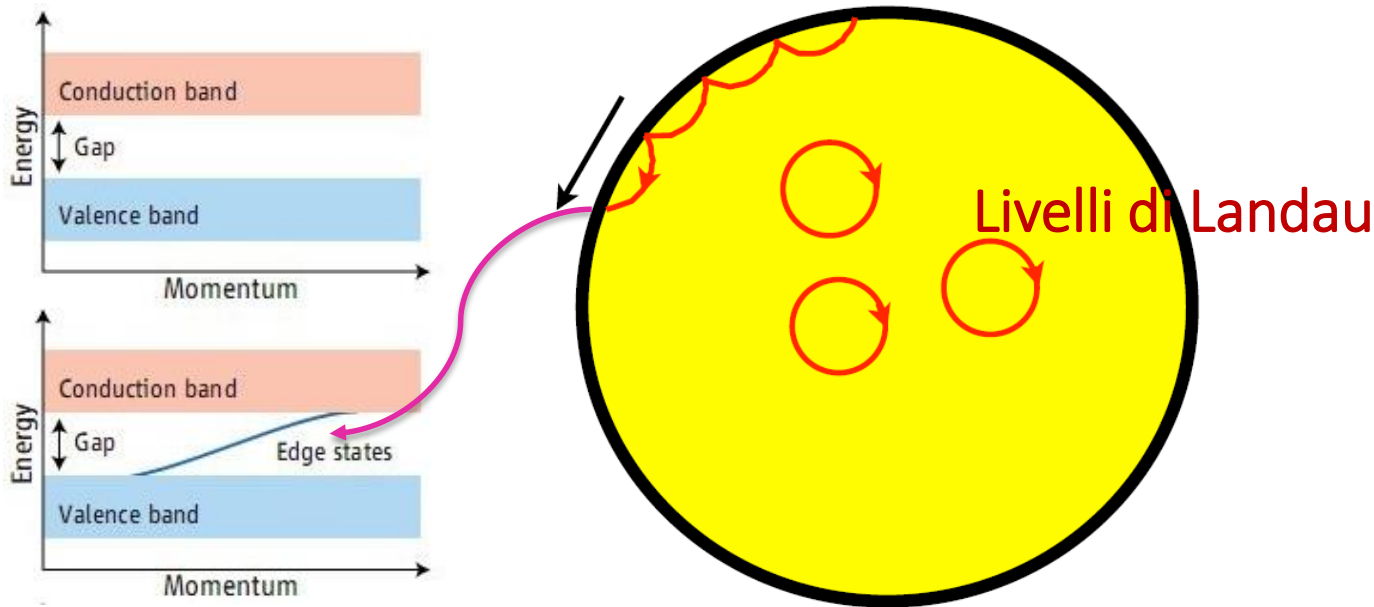
$$\sigma_H = \nu e^2 / h$$



$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \omega_c = eB/mc \quad \hbar\omega_c \gg kT$$

Fonte: Wikipedia

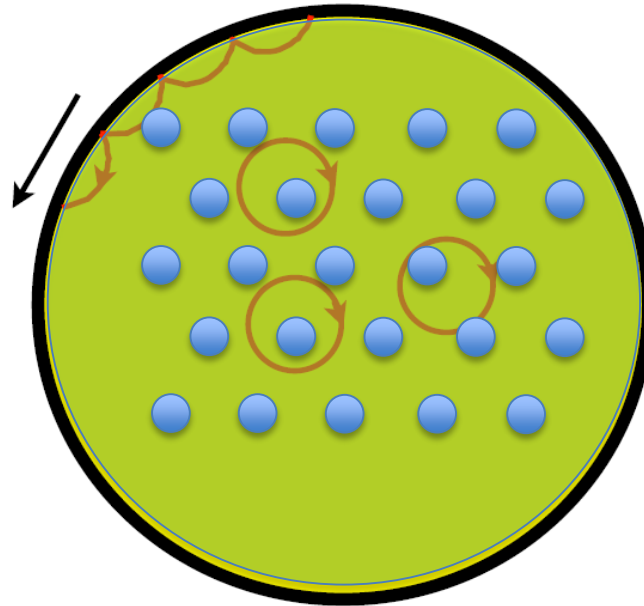
Von Klitzing, Nobel 1985



C'è un gap energetico tra i livelli; come mai la conduttività è diversa da zero sui plateau?

Esistono stati che «viaggiano» sui bordi per effetto della estensione finita.

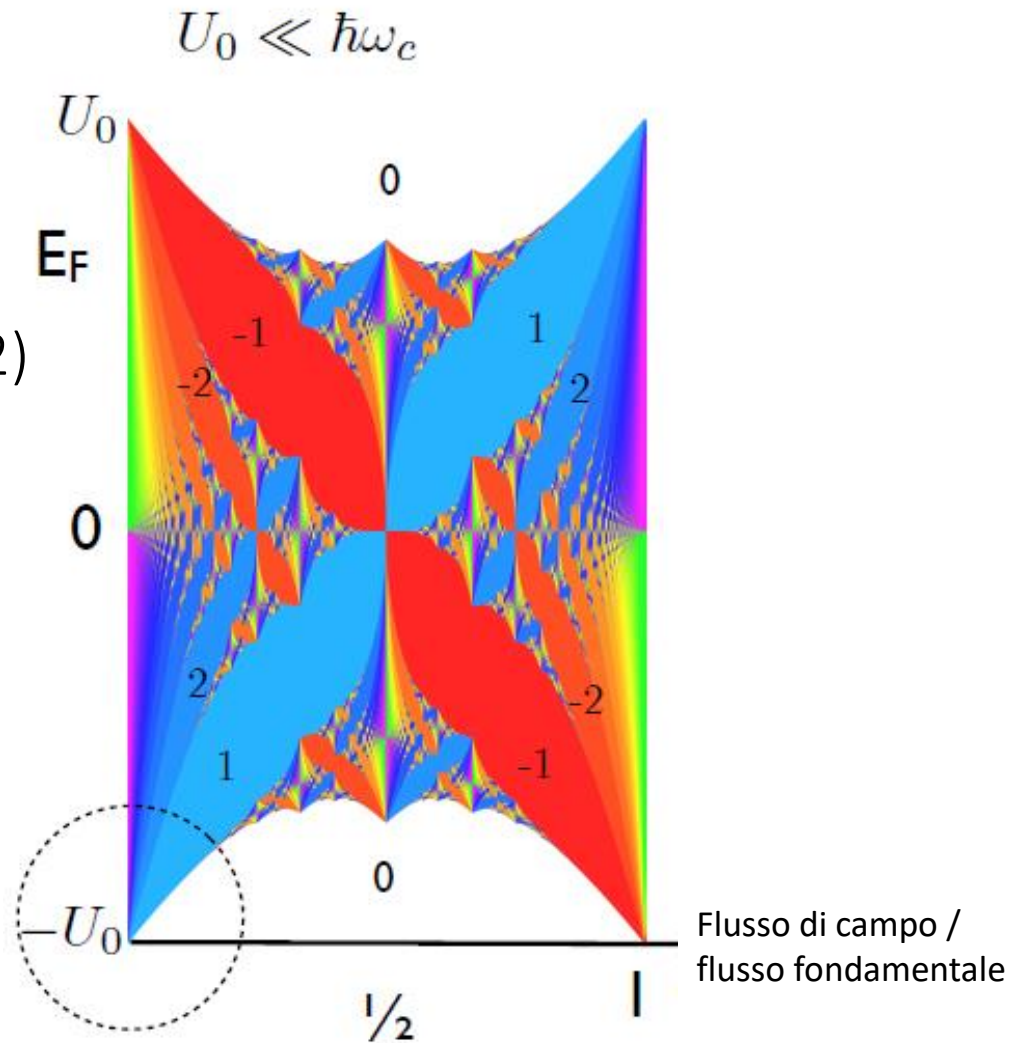
Fonte: Haldane Nobel Lecture,



Cosa accade se si «vede» il cristallo in cui si muovono gli elettroni ?

Farfalla di Hofstadter

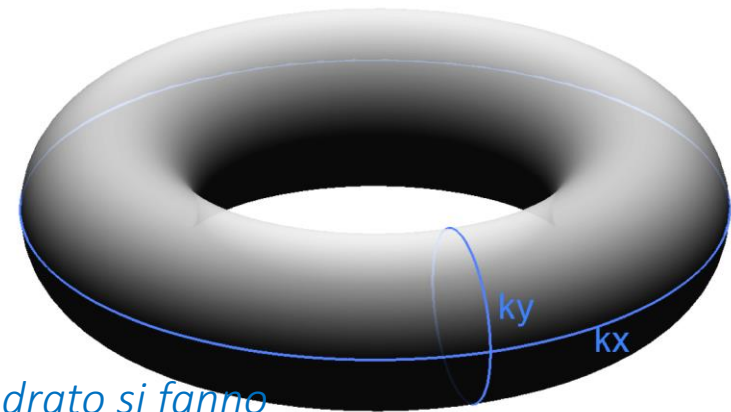
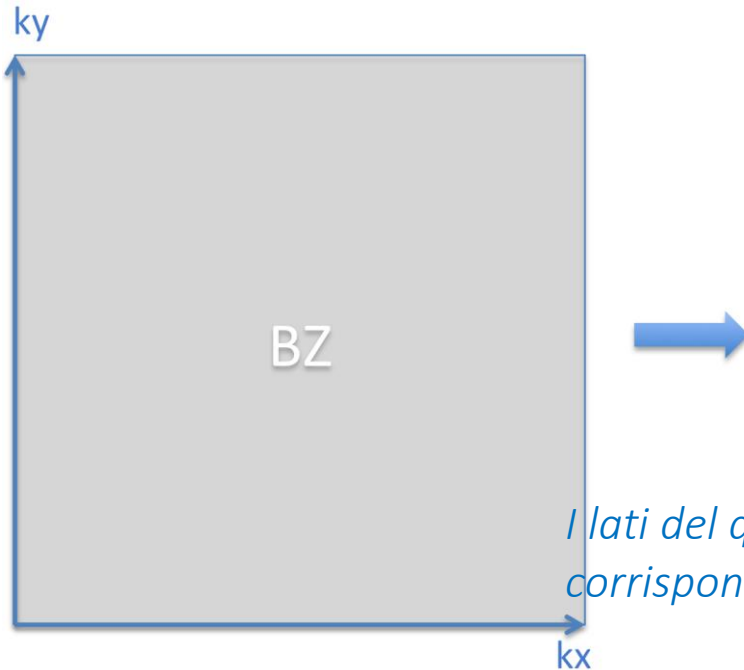
(Thouless et al.1982)



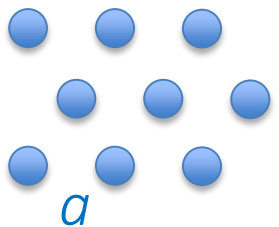
Cosa accade se si «vede» il cristallo in cui si muovono gli elettroni ?

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) \sim \exp(i\vec{x} \cdot \vec{k}) u_{\vec{k}}(\vec{x})$$

Funzioni d'onda di Bloch in un cristallo

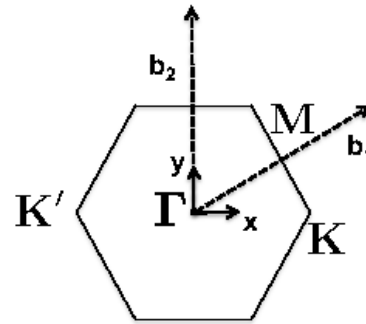
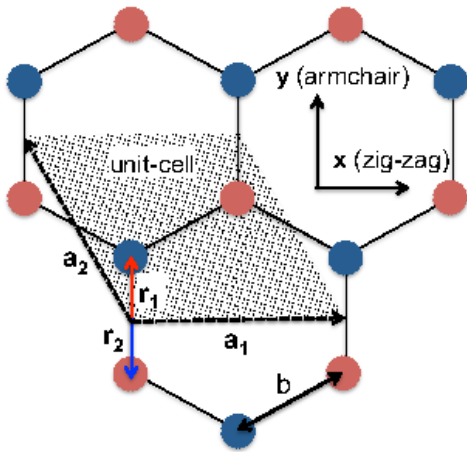


I lati del quadrato si fanno corrispondere > Toro



Il numero d'onda (k_x, k_y) in un cristallo è definito in una regione finita BZ con estensione $\sim 1/a$
La forma precisa dipende dal reticolo cristallino reale.

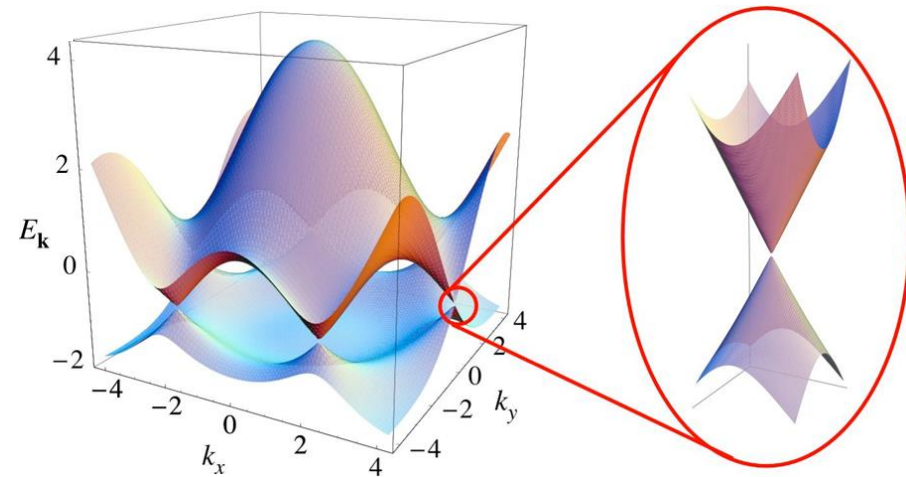
Una digressione (pittorica) sul **grafene** (Geim & Novoselov, Nobel 2010)



In generale:

5 reticoli di Bravais in 2D
14 reticoli possibili in 3D

... e tutte le decorazioni possibili
della cella unitaria



Dalla topologia in spazio reale (vortici) alla topologia codificata negli stati quantistici (funzioni d'onda).

I materiali topologici e non si classificano sulla base delle simmetrie presenti nello spazio k (BZ).

Thouless e poi Simon spiegano teoricamente con la topologia l'esperimento del EQH (vortici in uno spazio astratto). Con una serie di passaggi noti come formula di Kubo capiscono che σ_H la stessa ha la forma che si riscontra in un importante teorema (Gauss-Bonnet) in geometria...

$$\sigma_H = \frac{ie^2}{2\pi h} \sum_n \int_{\text{Brillouin zone}} d^2k \int_{\text{unit cell}} d^2r \left(\frac{\partial u_n^*}{\partial k_1} \frac{\partial u_n}{\partial k_2} - \frac{\partial u_n^*}{\partial k_2} \frac{\partial u_n}{\partial k_1} \right)$$

Somma su bande occupate

Gauss-Bonnet: L'integrale di una proprietà geometrica locale nota come curvatura vale $4\pi(1 - \# \text{maniglie})$ per una superficie chiusa.

Ad es. in un toro ci devono essere punti in cui la curvatura è negativa (una maniglia, integrale 0)

$$\mathcal{F}_n^{ab}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2i} \int_{\text{unit cell}} d^d \mathbf{r} \left(\frac{\partial u_n^*}{\partial k_a} \frac{\partial u_n}{\partial k_b} - \frac{\partial u_n^*}{\partial k_b} \frac{\partial u_n}{\partial k_a} \right)$$

Berry curvature

an antisymmetric tensor in momentum space

Un giro (chiuso) nello spazio \mathbf{k} comporta una fase (geometrica) nella funzione d'onda > Berry (1983)

Fonte: Haldane Nobel Lecture,

- The two-dimensional 1982 TKNN formula

$$\sigma_H^{ab} = \frac{e^2}{\hbar} \sum_n \int_{\text{BZ}} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \mathcal{F}_n^{ab}(\mathbf{k})$$

This is an integral over a “doughnut”: the torus define by a complete electronic band in 2D



Fase di Berry: Espressa come integrale di un «potenziale vettore» $A(\mathbf{k})$ per il «campo magnetico» $F(\mathbf{k})$ in spazio \mathbf{k}

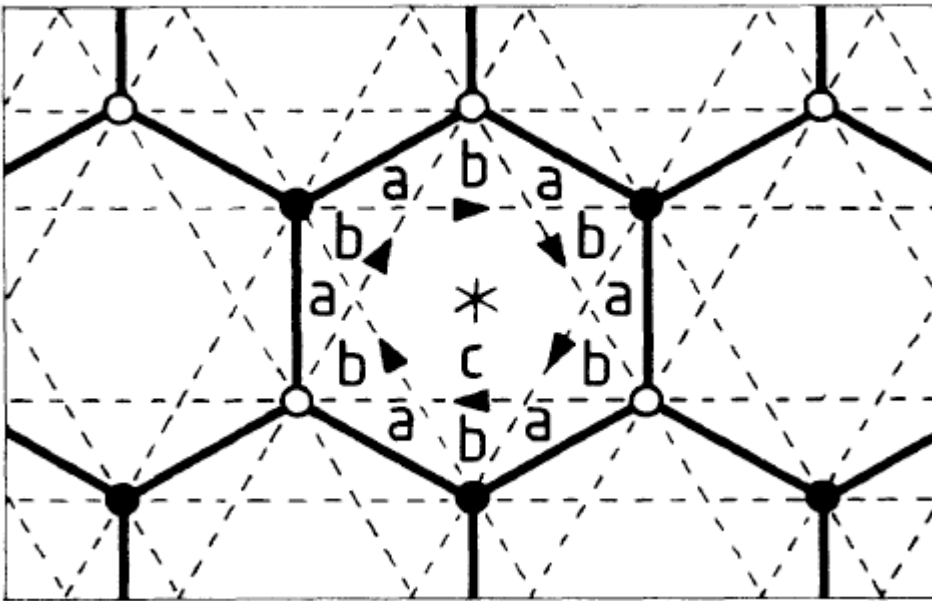
$$e^{i\Phi_B(\Gamma)} = \exp \left(i \oint_{\Gamma} dk_a \mathcal{A}_n^a(\mathbf{k}) \right)$$

La fase è definita a multipli di 2π e nella formula della conduttività l'integrale risulta un multiplo di 2π > Numero di Chern C

$$\sigma_H = C e^2 / h$$

E la somma totale dei numeri di avvolgimento dei vortici che appaiono e scompaiono quando un campo magnetico viene applicato intorno alla ciambella rimane sempre lo stesso. Non risente di cambiamenti microscopici «regolari» nel sistema > **Stabilità rispetto a difetti...**

Nel 1988, Haldane ha dato un contributo importante a completare questo modello, teorizzando che i fluidi topologici si possono formare nei semiconduttori **anche in assenza di campo magnetico**. Rottura di simmetria temporale (come se fossero campi magnetici locali che influenzano la fase degli elettroni nei salti da un atomo all'altro in reticoli tipo grafene – $B=0$ in media).



Prodromo di
Isolanti (con gap) Topologici

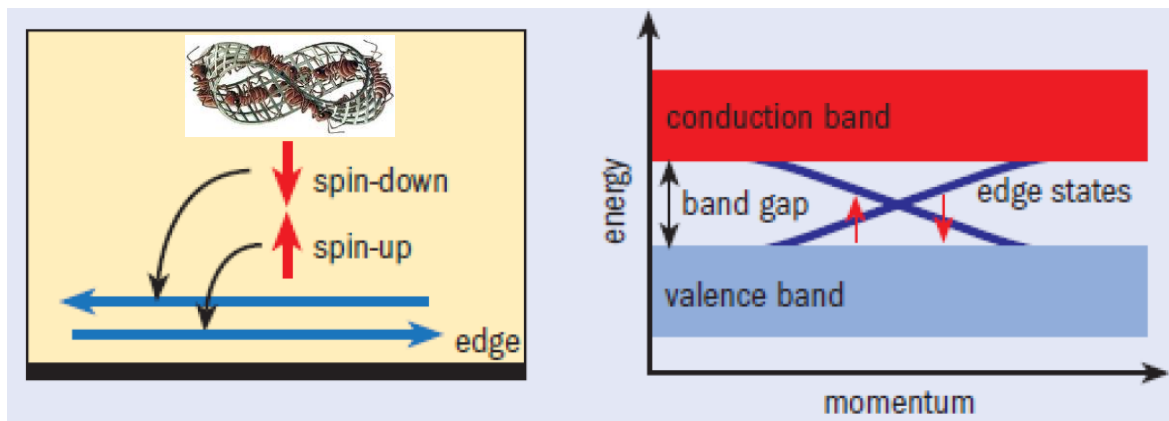
Fonte: Haldane Nobel Lecture,

Ma Kane e collaboratori (2005) si resero conto che alcuni isolanti realizzati con elementi pesanti in avrebbero potuto fornire i propri campi magnetici attraverso le interazioni interne tra elettroni e nuclei atomici – **accoppiamento spin-orbita**.

Entra in gioco lo **spin reale dell'elettrone**, e per due copie *up-down* del modello di Haldane con certe simmetrie si realizzano stati di bordo con numeri di topologici ben definiti, che si traduce in una **precisa correlazione tra il verso di propagazione e lo spin**.

Fasi
Spin-Hall

Spin-tronica



$C=0$ con $B=0$
Qua i numeri T. binari contano quanti stati ci sono nel gap. Dispari per materiali T.

Fonte: Kane & Moore

Questo dava agli **elettroni sulla superficie** del materiale (a contatto con un isolante ordinario) stati robusti e «topologicamente protetti».

2007: König et al., semiconduttori Quantum Spin Hall HgCdTe

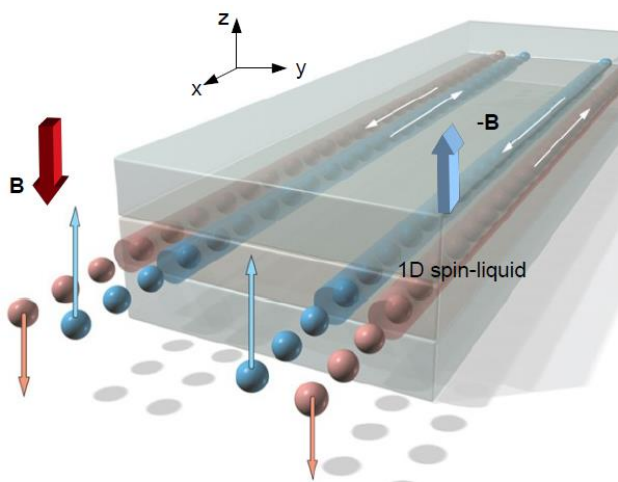


Tavola Periodica degli Elementi

1 IA																		2 IIA																		3 IIIB										4 IVB										5 VB										6 VIB										7 VIIB										8 VIII										9										10 IB										11 IIB										12										13 IIIA										14 IVA										15 VA										16 VIA										17 VIIA										18 VIIIA																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
1 H																		2 He																		3 Li										4 Be										5 B										6 C										7 N										8 O										9 F										10 Ne										11 Na										12 Mg										13 Al										14 Si										15 P										16 S										17 Cl										18 Ar										19 K										20 Ca										21 Sc										22 Ti										23 V										24 Cr										25 Mn										26 Fe										27 Co										28 Ni										29 Cu										30 Zn										31 Ga										32 Ge										33 As										34 Se										35 Br										36 Kr										37 Rb										38 Sr										39 Y										40 Zr										41 Nb										42 Mo										43 Tc										44 Ru										45 Rh										46 Pd										47 Ag										48 Cd										49 In										50 Sn										51 Sb										52 Te										53 I										54 Xe										55 Cs										56 Ba										57-71										58 La										59 Ce										60 Pr										61 Nd										62 Pm										63 Sm										64 Eu										65 Gd										66 Tb										67 Dy										68 Ho										69 Er										70 Tm										71 Yb										72 Lu										73 Hf										74 Ta										75 W										76 Re										77 Os										78 Ir										79 Pt										80 Au										81 Hg										82 Tl										83 Pb										84 Bi										85 Po										86 At										87 Rn										88 Ra										89-103										89 Ac										90 Th										91 Pa										92 U										93 Np										94 Pu										95 Am										96 Cm										97 Bk										98 Cf										99 Es										100 Fm										101 Md										102 No										103 Lr									

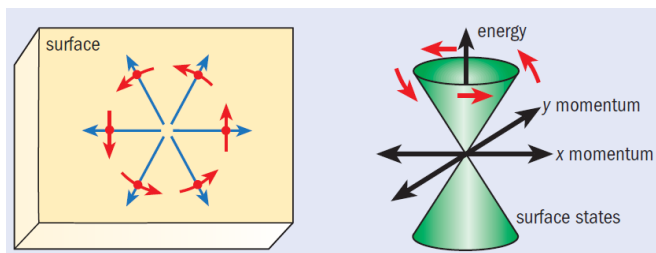
Qua gli indici topologici binari sono 4 per 16 possibili tipologie di Isolanti T. 3D

Le masse atomiche tra sono quelle degli isotopi più stabili o più comuni.

57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
138.905	140.116	140.90765	144.24	144.9128	150.36	151.964	157.25	158.90784	162.500	164.93032	167.259	168.93421	173.04	174.967
69 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr
227	232.0381	231.03588	238.02891	237	244	243	247	247	251	252	257	258	259	262

Fonte: M. Gaboardi

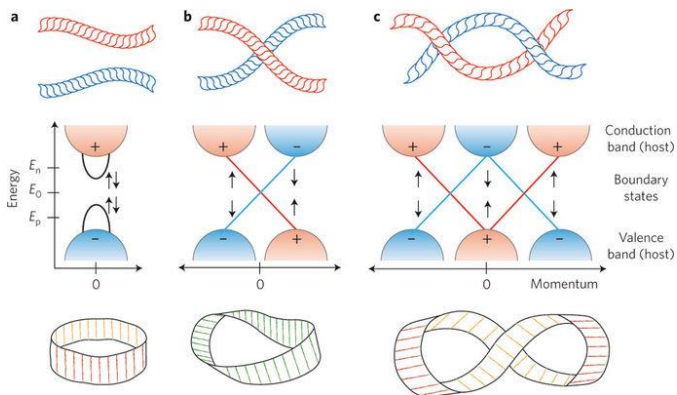
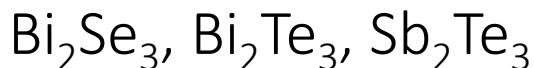
2008: Hasan, prima generazione (lega Bi-Sb) di isolanti topologici 3D vista con fotoemissione da superfici (ARPES)



E' come avere un conduttore 2D sulla superficie con precisa correlazione tra spin e direzione

Tavola Periodica degli Elementi

Seconda generazione, a temperatura ambiente



1 IA		Nuovo Originale										18 VIIIA																							
1 H	2 He											3 Li	4 Be	5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne																
11 Na	12 Mg	13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr										
37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe	55 Cs	56 Ba	57 to 71	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
87 Fr	88 Ra	89 to 103	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg	112 Uub	113 Uut	114 Uuq	115 Uup	116 Uuh	117 Uus	118 Uuo	119 to 118	119 to 118	119 to 118	119 to 118	119 to 118	119 to 118	119 to 118	119 to 118	119 to 118	119 to 118	119 to 118	119 to 118	119 to 118	119 to 118	119 to 118	119 to 118		

Legend: Solidi (C), Liquidi (Br), Gas (H), Artificiali (Te). Metalli alcalini, alcalino terrosi, blocco d, Lantanidi, Attinidi, blocco p, Nonmetalli, Gas nobili.

Note: Le masse atomiche tra sono quelle degli isotopi più stabili o più comuni. Nota: il sotto gruppo dei numeri 1-18 è stato adottato nel 1984 dalla International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC). I nomi degli elementi 112-118 sono gli equivalenti latini di quei nomi.

Fonte: Manoharan, 2010; Kane&Moore 2011



"The ability to reduce everything to simple fundamental laws does not imply the ability to start from those laws and reconstruct the universe."

*Philip Warren
Anderson*

Perché?

More is different, (1972, Nobel 1977)

Conoscenza sempre più approfondita della materia in quanto aggregato...

Una variante topologica da scoprire per i vari stati ordinari della materia che conosciamo...

*Bernevig et al. 2017, An Atlas of Topological Quantum **Chemistry***

Poi ci sono oggi apparati sperimentali che hanno una versatilità così alta (atomi freddi) da poter pensare di mettere alla prova diversi modelli teorici.

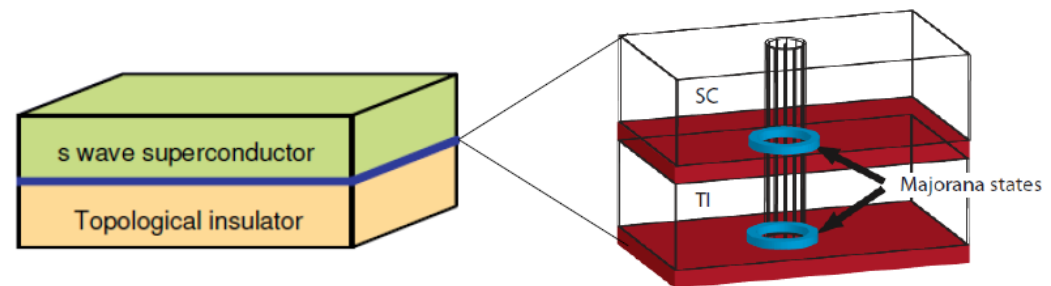
Computazione Quantistica: Realizzazione di registri, memorie e porte logiche quantistiche in cui si possano rappresentare **simultaneamente gli stati 0 e 1 del (qu)bit** in una **sovrapposizione lineare** protetta dalla decoerenza.

Programma di Microsoft, e altri, per CQ Topologica:

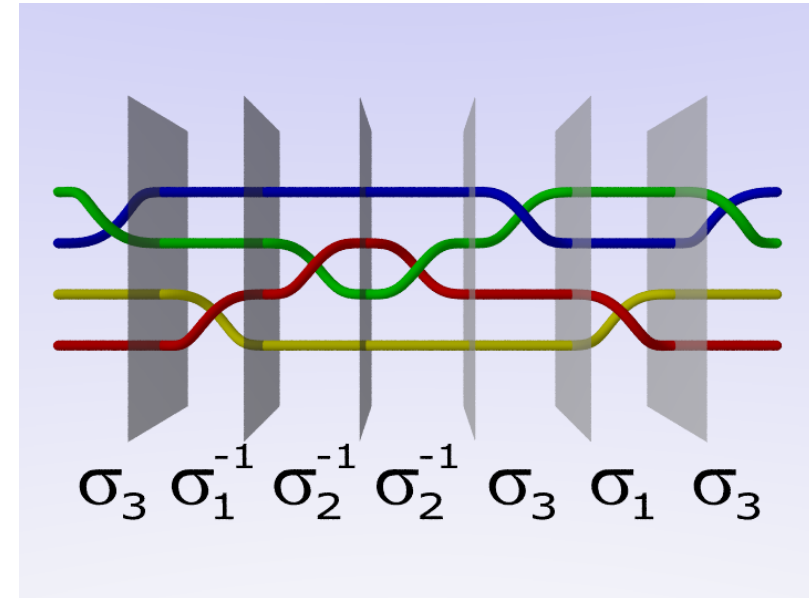
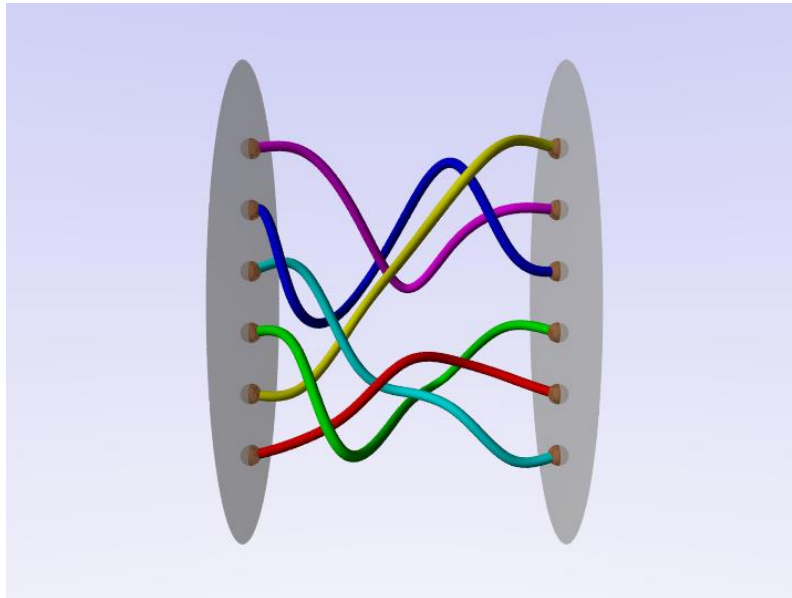
Codificare ed elaborare informazione quantistica in stati topologicamente protetti, usando materia quantistica in condizioni «esotiche», come ad esempio nell'effetto Hall Q. frazionario (funzioni d'onda di Laughlin, Nobel 1998) o nella superficie di separazione tra un isolante topologico ed un superconduttore

c.d. **Fermioni di Majorana**

«mezzo» fermione uguale alla sua antiparicella



Gruppo delle Trecce e Computazione Quantistica (Universale)



Ci sono operazioni elementari $[\sigma_i]$ tra coppie di qubit; la natura topologica si riflette in un «ricordo» della trasformazione subita per arrivare ad una data configurazione.

Fonte: E. Dalvit, Matematita

*Exotic expresses our wonder...
What we consider exotic now might not be so
exotic in the future...*

«Sulle spalle dei giganti», AISF Bologna, 10 maggio 2018

Grazie per la vostra attenzione

Cristian Degli Esposti Boschi, email : degliesposti@bo.imm.cnr.it